整式の計算

http://new_math.zacky.ninja-x.jp

printed : 2014.02.27/15:14

整式の乗法

展開・因数分解の公式

和・差の平方	$(a \pm b)^2$	$= a^2 \pm 2ab + b^2$
和と差の積	$(a+b)(a-b)$	$= a^2 - b^2$
1項が共通	$(x+a)(x+b)$	$= x^2 + (a+b)x + ab$
すべての項が異なる	$(ax+b)(cx+d)$	$= acx^2 + (ad+bc)x + bd$
和・差の立方	$(a \pm b)^3$	$= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
立方の和・差	$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$	$= a^3 \pm b^3$
3項の2乗	$(a+b+c)^2$	$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

ただし、複号同順とする。

たすきがけ(因数分解の筆算)

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

上式の因数分解を、筆算で行なうと、楽に計算をすることができる。

実際の記法	原理的な意味
$\begin{array}{cccc} a & & b \longrightarrow & cd \\ & \times & & \\ c & & d \longrightarrow & ad \\ \hline ac & & bd & ac+bd \end{array}$	$\begin{array}{cccc} ax & & b \longrightarrow & bcx \\ & \times & & \\ cx & & d \longrightarrow & adx \\ \hline acx^2 & & bd & (ad+bc)x \end{array}$

Step1 元の式の係数を書く。(順序に注意！)

$$Ax^2+Bx+C \implies \begin{array}{cccc} \bigcirc & & \bigcirc \longrightarrow & \bigcirc \\ & \times & & \\ \bigcirc & & \bigcirc \longrightarrow & \bigcirc \\ \hline A & & C & B \end{array}$$

Step2 積がA，Cになり、かつ互い違いの積の和がBになる値を探す。
※一ヵ所だけが加法であることに注意！

$$\begin{array}{cccccc} & a & & & b \xrightarrow{\times} & bc \\ & & \times & & & \\ \times) & c & & \times) & d \xrightarrow{\times} & +)\ ad \\ \hline & A & & & C & B \end{array}$$

Step3 係数を取り出して、因数分解の式を求める。

$$\begin{array}{cccc} a & & b \longrightarrow & bc \\ & \times & & \\ c & & d \longrightarrow & ad \\ \hline A & & C & B \end{array} \implies (ax+b)(cx+d)$$

※逆を言えば、$(ax+b)(cx+d)$ の展開をたすきがけ型の筆算で求めることができる。

絶対値｜　｜

絶対値

数直線上において、ある実数 a と原点との距離を $|a|$ と表す。

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{のとき}) \end{cases}$$

絶対値は距離なので、必ず $|a| \geqq 0$ である。

注意 中学・高校の絶対値を区別しよう！

絶対値の考え方

	中学	高校	備考
求め方	符号を外す	符号を変える	
数の絶対値	$|-5| = \begin{cases} 5 & (\text{符号を外す}) \\ -(-5) & (\text{符号を変える}) \end{cases}$		値の正負が符号で見えるので、符号を外すと見ても大丈夫。
文字の絶対値	$|a| = a$ マイナスがないから、これでOK？ もし、$a < 0$ だったらどうするの？	$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{のとき}) \end{cases}$	値の正負が符号で見えないので、厳密な場合分けが必要になる。

平方根 $\sqrt{}$

平方根

2乗するとある値になる数を、ある数の"平方根"という。0以外は、正負の2数ある。

根号 $\sqrt{}$

"正の平方根"を表す記号。

※ただの「平方根」を表す記号ではないことに注意！

$$\begin{cases} 25\text{の平方根} & = \pm 5 \\ \sqrt{25} & = 5 \end{cases}$$

注意

具体的な数値の場合は良いが、文字の平方根を求める場合は要注意！

負の場合は、中学までのように「符号を"取って"正にする」ではなく、「符号を"変えて"正にする」という発想で取り組むこと。

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases} \quad (\sqrt{a^2} \geqq 0\text{であることに注意})$$

$\sqrt{a^2} = a$ だと、$a < 0$ のときに、$\sqrt{\bigcirc} =$ 負の数 となり、本来の $\sqrt{\bigcirc} =$ 正の数 と矛盾する。

備考 値の扱い方は絶対値と同じ

$\sqrt{a} = a$ ではない、$|a| = a$ でもない。

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

二重根号

$$\begin{aligned}\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}} &= \sqrt{\left(\sqrt{a}\right)^2 \pm 2\sqrt{ab} + \left(\sqrt{b}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)^2} \\ &= \left|\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right| \quad (\because \sqrt{a^2}=|a|) \\ &= \begin{cases} \sqrt{a}+\sqrt{b} & \\ \sqrt{a}-\sqrt{b} & \left(\sqrt{a}\geqq\sqrt{b}\right) \\ \sqrt{b}-\sqrt{a} & \left(\sqrt{a}<\sqrt{b}\right) \end{cases}\end{aligned}$$

引き算の場合は、値が負にならないように注意すること。($\sqrt{}$ は、正の平方根を表す)

高次の展開

パスカルの三角形

2項の多項式 $(a+b)$ の累乗を展開したときの係数について、次のように並べたものを“パスカルの三角形”という。

隣接する2数の和が、下段の数になっている。

$$\begin{array}{lccccccccc}
(a+b)^0 & & & & & 1 & & & & \\
(a+b)^1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
(a+b)^2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
(a+b)^3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
(a+b)^4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

自由研究：シェルピンスキー・ガスケット

補足　組合せ公式 ${}_{n-r}C_{r-1} + {}_{n-r}C_r = {}_nC_r$

パスカルの三角形が二項係数であり、上の2数の和であることから、次の組合せ公式が得られる。

$$\left\langle \begin{array}{ccc} {}_{n-r}C_{r-1} & & {}_{n-r}C_r \\ & {}_nC_r & \end{array} \right\rangle \Longrightarrow \left\langle {}_{n-r}C_{r-1} + {}_{n-r}C_r = {}_nC_r \right\rangle$$

考え方

リーダーを1人決めた上で、r 人のメンバーを決める。

$$\begin{cases} {}_{n-r}C_{r-1} & \text{リーダーをメンバーに入れて、他の}(r-1)\text{人を決める} \\ {}_{n-r}C_r & \text{リーダーはメンバーに入れず、}r\text{人を決める} \end{cases}$$

上のように、リーダーをメンバーに入れるか入れないか場合分けした組合せの式と見ることができる。

これで、何乗の展開でも求められる！　……本当？

これ、100乗とか来たら100段書くの？無理じゃね？

便利そうに見えて、意外と使えないのがパスカルの三角形です。

諦めて、次の二項定理を覚えましょう。

二項定理

Ⅰ A Ⅱ B Ⅲ C 補

2項の多項式 $(a+b)$ を n 乗したとき、$a^r b^{n-r}$ の係数は、${}_n\mathrm{C}_r$ である。(これを**“二項係数”**という)

“ $(a+b)^n$ の一般項は、${}_n\mathrm{C}_r a^r b^{n-r}$ である”ということもある。

$$(a+b)^n \Longrightarrow {}_n\mathrm{C}_n a^n b^0 + {}_n\mathrm{C}_{n-1} a^{n-1} b^1 + {}_n\mathrm{C}_{n-2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \underbrace{{}_n\mathrm{C}_r a^r b^{n-r}}_{\text{一般項}} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_1 a^1 b^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_0 a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k}$$

式の意味

(例) $(a+b)^4$ を展開したときのの $a^3 b$ の係数

$$(a+b)^4 = \begin{cases} (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \\ (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \\ (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \\ (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \end{cases}$$

4個のカッコのうち、a をかける3個のカッコを選ぶ方法は、${}_4\mathrm{C}_3$ 通り。

⇒ n 個のカッコのうち、a をかける r 個のカッコを選ぶ方法は、${}_n\mathrm{C}_r$ 通り。

注意

$a^r b^{n-r}$ **の係数は** ${}_n\mathrm{C}_r$ **である**と述べたが、a, b **自体が** $2x, -5$ **などの数を含むとき**は実質的な意味で係数にならない。

多項定理

3項の多項式 $(a+b+c)$ を n 乗したとき、$a^l b^m c^n$ の係数は、$\frac{n!}{l!m!n!}$ である。
ただし、$l+m+n=n$ である。

多項定理

$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k)^n$ の一般項は、$\dfrac{n!}{m_1!m_2!m_3!\cdots m_k!}a_1^{m_1}a_2^{m_2}a_3^{m_3}\cdots a_k^{m_k}$ である。
ただし、$m_1+m_2+m_3+\cdots+m_k=n$ とする。

式の意味

n のカッコが並んでいる中から、a_1 を m_1 個選び、a_2 を m_2 個選び、a_3 を m_3 個選び、……… a_k を m_k 個選ぶ方法が何通りあるかを求める。

参考: 数A「同じものを含む順列」

除法の表現

余り記号“···”の弊害

除法の表現は意外と曖昧なもので、以下のように「右辺が等しいから、左辺も等しい」が使えません。

$$\begin{cases} 3\div 2 & =1\cdots 1 \\ 4\div 3 & =1\cdots 1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{3}{2} \stackrel{?}{=} \frac{4}{3}$$

これは、「余り」があるために起こる不都合です。

本質的には、帯分数を用いて書くべきでしょう。

$$\begin{cases} 3\div 2 & =1\frac{1}{2} \\ 4\div 3 & =1\frac{1}{3} \end{cases}$$

これからは「余りを用いずに、除法を除法以外の方法で表現する」方法について考えます。

除法の表現

P を B で割ったとき、商が Q で余りが R とする。

$$\begin{array}{lll} P\div B & =Q\cdots R & \\ (P-R)\div B & =Q & (\text{余りがないよう、割る前に引いておく}) \\ P-R & =BQ & (\text{除法記号}"\div"\text{を使わないように、両辺を}B\text{倍する}) \\ P & =BQ+R & (\text{余り}R\text{は、元々右辺にいるべき数である}) \end{array}$$

以上より、「 P は、B で割ると、商が Q で R 余る数」と読むことができる。

これは同様にして、整式においても次のようにおくことができる。

$$\begin{array}{ll} P(x)\div B(x) & =Q(x)\cdots R(x) \\ (P(x)-R(x))\div B(x) & =Q(x) \\ P(x)-R(x) & =B(x)Q(x) \\ P(x) & =B(x)Q(x)+R(x) \end{array}$$

ただし、$R(x)$ の次数は、$B(x)$ の次数未満である。

備考

整式 P

polyminal(多項式) の頭文字

商 Q

quotient の頭文字

余り R

residue の頭文字

除法の常識

$7\div 3=1\cdots 4$ はまだ割り切れていません。$\Longrightarrow 7\div 3=2\cdots 1$

余りが割る数以上であれば、まだその余りを割ることができるので、必ず余りは割る数3未満になることがわかります。

これは、整式の除法でも同様のことが言えます。(数の大小ではなく、次数の大小で議論する)

$$0\leqq a\div b\text{の余り}<b \quad\Longrightarrow\quad m\text{次式}\div n\text{次式}=\begin{cases} \text{商} & (m-n)\text{次式} \\ \text{余り} & n\text{次式未満の式} \end{cases}$$

組立除法(剰余の定理の筆算)

α	a_0	a_1	a_2	a_3
		ab_0	a_1b_1	a_2b_2
	b_0	b_1	b_2	R

$$(a_0x^3+a_1x^2+a_2x^1+a_3)\div(x-\alpha)=b_0x^2+b_1x+b_2 \quad \cdots R$$

※各式の次数に注目すると、

$$n\text{次式}\div 1\text{次式}=(n-1)\text{次式} \quad \cdots\text{定数}$$

上式の組立除法は、右のようになる。

手順

Step1 割られる式 $(a_0x^3+a_1x^2+a_2x^1+a_3)$ の係数を、上段に並べる。

Step2 割る式 $(x-\alpha)$ の α を左上に書く。

Step3 最高次係数を下段に下ろす。

Step4 前ステップの下段の数と、左上の数 α の積を、1つ右列の中段に書く。

Step5 前ステップの中段の数をその上段の数に加えたものを、その下段に書く。

Step6 Step4に戻り、最右列の下段が埋まるまで行なう。

Step7 下段の数を(割られる式の次数-1)次式の係数、右側の数を余りとして読む。

原理

原理(文字 b を用いず表す)

α	a_0	a_1	a_2	a_3
		$a_0\alpha$	$(a_0\alpha+a_1)\alpha$	$((a_0\alpha+a_1)\alpha+a_2)\alpha$
	a_0	$a_0\alpha+a_1$	$(a_0\alpha+a_1)\alpha+a_2$	$((a_0\alpha+a_1)\alpha+a_2)\alpha+a_3$

$$\begin{aligned} & ((a_0\alpha+a_1)\alpha+a_2)\alpha+a_3 \\ = & \ a_0\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3 \quad =P(\alpha) \end{aligned}$$

となるので、剰余の定理そのものである。

除法の表現～約分・帯分数化～

I A II B III C 補

$$P(x)=B(x)Q(x)+R(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{P(x)}{B(x)}=\frac{B(x)Q(x)+R(x)}{B(x)}$$

と表せることから、

$$\frac{P(x)}{B(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{B(x)} \quad \text{(帯分数化)}$$

特に、$R(x)=0$ のとき、

$$\frac{P(x)}{B(x)}=Q(x) \quad \text{(約分)}$$

数III　帯分数化と微分・積分

分数の微分

タイプ	分子に文字を含む	分子に文字を含まない(帯分数化)
公式	$\dfrac{d}{dx}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$	$\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{-f(x)}{\{f(x)\}^2}$
例	$\dfrac{d}{dx}\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}$	$\dfrac{d}{dx}\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{d}{dx}\dfrac{(x+1)(x-1)+1}{x-1}$ $=\dfrac{d}{dx}\left(x+1+\dfrac{1}{x-1}\right)$ $=1+\dfrac{-1}{(x-1)^2}$
備考	帯分数化は面倒でも、1つ1つの微分は楽になる	

分数の積分

タイプ	分子に文字を含む	分子に文字を含まない(帯分数化)
公式	$\displaystyle\int\frac{f(x)}{x}dx=\int f(x)\cdot\frac{1}{x}dx$ の部分積分	$\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\log\|x\|+C$
例	※積分範囲が正であるものとして、$\|x\|=x$ として扱う。 $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x}dx$ $\displaystyle=(x^2-1)\log\|x\|-\int 2x\log\|x\|dx$ $\displaystyle=(x^2-1)\log\|x\|-\left(x^2\log\|x\|-\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx\right)$ $\displaystyle=x^2\log\|x\|-\log\|x\|-x^2\log\|x\|+\int xdx$ $\displaystyle=-\log\|x\|+\frac{1}{2}x^2+C$	$\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x}dx=\int\left(x+\frac{-1}{x}\right)dx$ $\displaystyle=\frac{1}{2}x^2-\log\|x\|+C$
備考	部分積分せずに済むので、帯分数化の方が楽	

剰余の定理

整式 $P(x)$ を1次式 $B(x)=x-\alpha$ で割ったときの余りが R であるとき、次のように表すことができる。

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$$

※1次式 $(x-\alpha)$ で割ったので、余り $R(x)$ は1次未満の式。すなわち $R(x)=R(\text{定数})$ として扱うことができる。

剰余の定理

整式 $P(x)$ を、1次式 $(x-\alpha)$ で割ったときの余りは、$P(\alpha)$ である。

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-\alpha)Q(x)+R \\ P(\alpha) &= \underbrace{(\alpha-\alpha)Q(\alpha)}_{=0}+R \\ P(\alpha) &= R \end{aligned}$$

整式 $P(x)$ を、1次式 $(ax-b)$ で割ったときの余りは、$P\left(\frac{b}{a}\right)$ である。

$$\begin{aligned} P(x) &= (ax-b)Q(x)+R \\ P\left(\frac{b}{a}\right) &= \underbrace{\left(a\times\frac{b}{a}-b\right)Q\left(\frac{b}{a}\right)}_{=0}+R \\ P\left(\frac{b}{a}\right) &= R \end{aligned}$$

応用

3次式 $P(x)$ を、2次式 $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割ったときの余りは、必ず1次以下になる。

したがって、余りを $R(x)=ax+b$ とおくことができるので、剰余の定理より、

$$\text{連立方程式}\begin{cases} P(\alpha) = R(\alpha) = \alpha a+b \\ P(\beta) = R(\beta) = \beta a+b \end{cases} \Longrightarrow \text{解 } (a,b)$$

この連立方程式を解くことで、余り $R(x)=ax+b$ を求めることができる。

因数定理

$$P(x)\text{が}\begin{cases}1\text{次式}(x-\alpha)\text{を因数にもつ}\\1\text{次式}(x-\alpha)\text{で因数分解できる}\\1\text{次式}(x-\alpha)\text{で割り切れる}\end{cases}\iff P(\alpha)=0$$

考え方　剰余の定理において、$R=0$ の特別な場合と見る

$$\begin{aligned}P(\alpha)&=R\quad=0 &&(\because\text{剰余の定理})\\ \therefore\ P(x)&=\underbrace{(x-\alpha)Q(x)}_{\substack{\text{余り無く因数分解が可能}\\ \Longrightarrow\text{割り切れる}}}+0\end{aligned}$$

※余り $R=0$ という、特別な剰余の定理。(つまり、改めて覚えるようなことではない)

因数定理における α の探し方

整式 $P(x)=ax^n+\cdots+b$ において、因数定理 $P(\alpha)=0$ を満たす α の候補は、

$$\text{因数定理の}\alpha\text{の候補}=\pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次係数の約数}}$$

原理

$$\begin{aligned}P(x)&=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)\\&=ax^n+\cdots\underbrace{\pm a\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}_{\text{定数項}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \text{定数項}&=\pm a\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n\\ \alpha_1&=\pm\frac{\text{定数項}}{a\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}=\pm\frac{\text{定数項の約数}}{a}\end{aligned}$$

ただし、1次の項に係数がある因数が含まれるとき、

$$\begin{aligned}P(x)&=a_1(a_2x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)\\&=\underbrace{a_1a_2}_{\text{最高次係数}}\left(x-\frac{\alpha_1}{a_2}\right)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)\end{aligned}$$

このとき、$P(\alpha_1)\neq0$ であり、因数定理が成立するためには、$P\left(\frac{\alpha_1}{a_2}\right)=0$ とする必要がある。

a_2 は最高次係数の約数であるから、次のことがいえる。

$$\text{因数定理の}\alpha\text{の候補}=\pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次係数の約数}}$$

整式の除法

整式の除法のパターン

方法	余りの対応	割る数 $B(x)$ の条件	備考
整式の約分	不可	任意	分母・分子の共通因数を見つける
帯分数化	可	任意	整式の約分の一般化(余り対応)
筆算	可	任意	
組立除法	可	1次式 $(x-\alpha)$	$B(x)=ax+b$ のとき、 $\alpha=-\frac{b}{a}$ として扱う

$$P(x)=B(x)Q(x)+R(x)$$

余りの場合分け	$R(x)\neq 0$ の一般的な場合	$R(x)=0$ の特殊な場合
	剰余の定理	因数定理
$B(x)=x-\alpha$ のとき	$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$ $P(\alpha)=R$	$P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ $P(\alpha)=0$
$B(x)=ax-b$ のとき	$P(x)=(ax-b)Q(x)+R$ $P\left(\frac{b}{a}\right)=R$	$P(x)=(ax-b)Q(x)$ $P\left(\frac{b}{a}\right)=0$
分数式	帯分数化	約分
	$\frac{P(x)}{B(x)}=\frac{B(x)Q(x)+R(x)}{B(x)}$ $=Q(x)+\frac{R(x)}{B(x)}$	$\frac{P(x)}{B(x)}=\frac{B(x)Q(x)}{B(x)}$ $=Q(x)$

$B(x)=ax+b$ の除法

除法の表現

剰余の定理・因数定理では、割る数は1次式 $B(x)=x-\alpha$ の形で扱う。

このため、1次の項に係数がつき、$B(x)=ax+b$ の場合には注意が必要になる。

$$\begin{aligned} P(x) &= (ax+b)Q(x)+R && \text{(この形が理想でも...)} \\ &= \left(x+\frac{b}{a}\right)\cdot aQ(x)+R && \text{(この形になる)} \end{aligned}$$

例題　$8x^3+12x^2-2x-3$ を因数分解せよ。

因数定理より、$x=\frac{1}{2}$ で 左辺 $=0$ なので、

$$\text{因数定理の}\alpha\text{の候補}=\pm\frac{3\text{の約数}}{8\text{の約数}}$$

$$\begin{aligned} 8x^3+12x^2-2x-3 &= \left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x) \\ Q(x) &= 8x^3+12x^2-2x-3\div\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ &= 8x^2+16x+6 && (\because \text{組立除法}) \\ &= 2(4x^2+8x+3) \end{aligned}$$

因数定理より $x=\frac{1}{2}$ としたが、実際的には $2x-1$ で因数分解されることは想像できる。

因数分解の手順

Step1 共通因数をくくり出す

Step2 (文字が複数ある場合は最低次数の文字について、)降べきの順に整理する
※このとき先頭の項が負ならば、-1をくくり出す

Step3 次のいずれかの方法で因数分解する

- 因数分解の公式を用いた因数分解
- たすきがけを用いた因数分解
- 因数定理を用いた因数分解
- 2次方程式の解の公式を用いた因数分解

Step4 他に因数分解できる部分があれば行なう