整数問題

数の分類

複素数 Complex number

実数と虚数の線形結合により表される数 $a+bi$

実数 Real number

数直線上に表すことができる数

虚数 Imaginary number

$i^2=-1$ を満たす値 i (虚数単位)により表される数

有理数 Rational number

$\dfrac{\text{整数}}{\text{整数}}$ で表される数。

無理数 Irrational number

非循環の無限小数。(※“ir”は、否定を表す接頭辞)

(例) $\sqrt{2}$ 、$\sqrt{3}$ 、π

素数 Prime number

1とそれ自身の数のみでしか割り切れない自然数。

ただし、1を除く。(理由は、「素因数分解の一意性」参照)

合成数 Composite number

素数の積で表される自然数。

2つ以上の素因数を持つ数、ともいえる。

$$\text{複素数}\mathbb{C}\begin{cases}\text{実数}\mathbb{R}\begin{cases}\text{有理数}\mathbb{Q}\begin{cases}\text{整数}\mathbb{Z}\begin{cases}\text{自然数}\mathbb{N}(\text{正の}\\0\\\text{負の整数}\end{cases}\\\text{有限小数}\\\text{循環小数}\end{cases}\\\text{無理数}\end{cases}\\\text{虚数}\end{cases}$$

また、

$$\text{無限小数}\begin{cases}\text{循環小数}\\\text{無理数}\end{cases}$$

備考 有理数の分類

既約分数 $\frac{n}{m}$ (整数 m,n は互いに素)で表される数において、

- 分母の素因数 $=1$ ならば、整数
- 分母の素因数 $=2^a\times5^b$ ならば、有限小数 …(※)
- それ以外は、循環小数

※有限小数は、$\frac{m}{10^n}$ の形で表されるので、

$$\frac{m}{10^n}=\frac{m}{(2\times5)^n}=\frac{m}{2^n\times5^n}$$

となり、分母の素因数が2と5のみであることがわかる。

循環小数

Ⅰ A Ⅱ B Ⅲ C 補

桁の上に点を打ち、繰り返す部分(循環節)を表現する。

$$0.\dot{1} = 0.111111\cdots \quad (\text{循環節 }1)$$
$$0.\dot{1}\dot{2} = 0.121212\cdots \quad (\text{循環節 }12)$$
$$0.\dot{1}2\dot{3} = 0.123123\cdots \quad (\text{循環節 }123)$$

分数→循環小数 の変換

分数を割り算に直し、筆算等で実際に割る。

循環小数→分数 の変換

n 桁で繰り返す循環小数 r について、

$$\begin{array}{rll} & 10^n r & = a \\ -) & r & = b \\ \hline & (10^n - 1)r & = a - b \\ & \therefore r & = \dfrac{a-b}{10^n - 1} \end{array}$$

例 $r = 0.\dot{1}\dot{2}$ を分数で表せ

$$\begin{array}{rll} & 100r & = 12\ .1212\cdots \\ -) & r & = \ \ 0\ .1212\cdots \\ \hline & 99r & = 12 \end{array}$$

であるから、

$$r = \frac{12}{99}$$
$$\therefore r = \frac{4}{33}$$

素因数分解

素因数分解

素因数(素数である因数)に分解すること

因数

数をつくる原因(元)となる数。

$$12 = \begin{cases} \left.\begin{array}{l} 2 \times 6 \\ 3 \times 4 \end{array}\right\} & \text{(ただの因数分解は複数考えられる)} \\ 2 \times 2 \times 3 & \text{(すべて素数の因数}\Longrightarrow\text{素因数分解}\cdots 1\text{通りのみ)} \end{cases}$$

素因数分解の一意性

素因数分解は、(乗法の交換法則で交換されたものを同一と見るとき、)ただ1通りに定まる。

備考 1を素数に含めてしまうと…？

$$\begin{aligned} 12 &= 2^2 \times 3 \\ &= 1 \times 2^2 \times 3 \\ &= 1^2 \times 2^2 \times 3 \\ &= 1^3 \times 2^2 \times 3 \\ &= \cdots \end{aligned}$$

上式のように、素因数分解の一意性が成り立たなくなり、数学的に不都合が生じる。

このため、1は素数に含めない。

約数

$$n = {p_1}^{m_1} \times {p_2}^{m_2} \times {p_3}^{m_3} \times \cdots \times {p_n}^{m_n}$$

と素因数分解される自然数 n の正の約数について考える。

約数の求め方

元の数を素因数分解したとき、 $\frac{\bigcirc^a \times \bigcirc^b}{\bigcirc}$ が割り切れる(約分して整数になる)ためには、分母が分子と共通の因数をもたなければならないので、例題のように表を描いて求めることができます。

約数の個数

$$\text{正の約数の個数} = (m_1+1)\times(m_2+1)\times(m_3+1)\times\cdots\times(m_n+1)$$

約数の総和

$$\begin{aligned}\text{正の約数の総和} &= (1+p_1+{p_1}^2+\cdots+{p_1}^{m_1})\times(1+p_2+{p_2}^2+\cdots+{p_2}^{m_2})\times\cdots\times(1+p_n+{p_n}^2+\cdots+{p_n}^{m_n})\\ &= \sum_{k=0}^{m_1}{p_1}^k \times \sum_{k=0}^{m_2}{p_2}^k \times\cdots\times \sum_{k=0}^{m_n}{p_n}^k\\ &= \prod_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_k}{p_k}^j\\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{{p_k}^{m_k}-1}{p_k-1}\right)\end{aligned}$$

※このままでは、“約数の総和を求める公式って、元より重くなってない？”と思いがちですが、数学Bで学習する“等比数列の和の公式”を用いると簡単になります。

参考：数学B「等比数列の和」

例題 50の約数と、その総和を求めよ。

$$50 = 2\times 5^2$$

と素因数分解できるので、

$$\begin{aligned}\text{約数の総和} &= (1+2)(1+5+5^2) && \text{(公式的な立式)}\\ &= 1(1+5+5^2)+2(1+5+5^2) && \text{(展開すると)}\\ &= (1+5+25)+(2+10+50) && \text{(右表の数が並ぶ)}\end{aligned}$$

50の素因数を列挙する

×	1	5	5^2
1	1	5	25
2	2	10	50

6個の数程度なら、表を書いて足す方が楽に見えますが、数が多くなったときには、この公式と、等比数列の和の公式が役立ちます。

最小公倍数・最大公約数

Ⅰ A Ⅱ B Ⅲ C 補

公倍数

2数の共通の倍数。

公約数

2数の共通の約数。

任意の2数において、1は必ず公約数である。

最小公倍数(Least Common Multiple：L.C.M.)

公倍数の中で最小の数。

最大公約数(Greatest Common Divisor：G.C.D.)

公約数の中で最大の数。

例 最小公倍数・最大公約数

$$\begin{array}{llllll} & 12 & = & 2 & \times 2 & \times 3 & \\ & 30 & = & 2 & & \times 3 & \times 5 \\ \hline \text{G.C.D.} & 6 & = & 2 & & \times 3 & \\ \text{L.C.M.} & 60 & = & 2 & \times 2 & \times 3 & \times 5 \end{array}$$

互いに素

$$\text{整数}a,b\text{が互いに素} \iff \text{整数}a,b\text{について、}\begin{cases}\text{共通な素因数をもたない} \\ \text{L.C.M.} = 1 \\ \text{G.C.D.} = ab \\ \frac{b}{a}\text{が約分できない}\end{cases}$$

※連続する2つの整数は、互いに素である。

最大公約数・最小公倍数の性質

2数 a, b の最大公約数 g と最小公倍数 l について、次の式が成り立つ。

$$ab = gl$$

背理法

$$\langle \text{命題} p \Longrightarrow q \text{が偽} \rangle \Longrightarrow \langle \text{命題} \bar{p} \Longrightarrow q \text{が真} \rangle$$

有名問題 $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する。

m, n を互いに素な整数とすると、

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{m}{n} \\ 2 &= \frac{m^2}{n^2} \qquad \text{(両辺を2乗する)} \\ 2n^2 &= m^2 \end{aligned}$$

であるから、m^2 が偶数である。

i. 奇数の2乗

$(2n+1)^2 = 2(2n^2+1n)+1$

ii. 偶数の2乗

$(2n)^2 = 4n^2$

より、m^2 が偶数であれば、m も偶数である。

したがって、$m = 2k$ (k は整数)とおけるので、

$$\begin{aligned} 2n^2 &= (2k)^2 \\ 2n^2 &= 4k^2 \\ n^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

であるから、n^2 も偶数となる。

このとき、m, n が共に偶数といえる。

これは、m, n が互いに素であることに矛盾する。

よって、$\sqrt{2}$ は(有理数ではなく)無理数であることが、背理法より証明された。