様々な式

等式

$$\text{等式}\begin{cases} \text{方程式}\begin{cases} \text{不定方程式} & \cdots \quad \text{グラフ} \\ \text{不能方程式} \end{cases} \\ \text{恒等式} \end{cases}$$

不定方程式

解が有限個に定まらない(無限個ある)方程式。

この解を座標としてプロットすると、規則的な図形(グラフ)が描かれる。

$$\text{(例)}\quad \text{2元1次方程式}\quad 2x-y-1=0$$

不能方程式

解をもたない方程式。

$$\text{(例)}\quad \text{連立方程式}\quad \begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

不定方程式の整数解

例 次の式を満たす整数の組 (a,b) を求めよ。

$a+b=5$ を満たす整数の組 (a,b)

a	5	6	7	8	…
b	0	-1	-2	-3	…

和の形では、無限(数えきれない)の整数の組で考えなくてはならない。

$a\times b=5$ を満たす整数の組 (a,b)

a	5	1	-1	-5
b	1	5	-5	-1

積の形なら、有限個の整数の組で考えることができる。

不定方程式は解が無限に存在しますが、整数に限れば十分に考えることができます。

パターン	$xy=$ 定数	$mx=ny$ $(m,n$は互いに素$)$
整数解	有限個	無限個
基本形	$xy=$ 定数	$mx=ny$
応用形	$(x+\bigcirc)(y+\bigcirc)=$ 定数	$m(x+\bigcirc)=n(y+\bigcirc)$
解答の方針	定数の約数を列挙する	互いに素なので、それぞれの係数が互いの因数であることを利用する
見分け方	2文字の積 xy がある	2文字の積 xy がない

パターン① $xy=$ 定数

定数の約数は有限ですから、それをすべて求めればOKです。

パターン② $mx=ny(m,n$は互いに素$)$

m,n は互いに素なので、未知数 y は m の倍数 $y=km$ となる。

$$mx=kmn$$
$$x=kn$$

であるから、

$$\begin{cases} x &= kn \\ y &= km \end{cases} \quad (k\text{は整数})$$

※元の式から、$a:b=n:m$ であることは、すぐに見抜けます

補足 $m(x+\bigcirc)=n(y+\bigcirc)$ の整数解の見つけ方

$mx+ny=a$ の整数解 (x,y) を求めるときには、$m(x+\bigcirc)=n(y+\bigcirc)$ の形に変形する必要があります。

$$mx+ny=a$$
$$y=\frac{-mx+a}{n}$$

x,y が共に整数になるためには、右辺の分子が n の倍数になる必要がある。

つまり、x について連続する n 個の整数($x=1,2,3,\cdots,n$)を調べれば、必ず1つが条件を満たす。

不定方程式の整数解・練習問題

次の等式を満たす整数の組 (x, y) を求めよ。

(1) $xy = 6$ 解答

(2) $xy - 2x + y + 3 = 0$ 解答

(3) $3x = 5y$ 解答

(4) $5x + 3y = 7$ 解答

対称式

多変数の式において、お互いの変数を入れ替えても、元の式と等しくなる式のこと。
すべての対称式は、基本対称式によって表すことができる。

$$P(x,y)=P(y,x)$$

2文字の基本対称式

和	$x+y$
積	xy

3文字の基本対称式

和	$x+y+z$
積和	$xy+yz+zx$
積	xyz

参考：数Ⅱ「解と係数の関係」

対称式と高次式の値

「 n 次の和 x^n+y^n は、積が n 次式になる2式の積をつくる」という単純な考えから分解していく。

例 x^5+y^5 の基本対称式化

「5次式」は、「2次式と3次式の積」でつくることができる。

$$
\begin{aligned}
(x^3+y^3)(x^2+y^2) &= x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5 \\
&= x^5+y^5+x^3y^2+x^2y^3 \\
\therefore\quad x^2+y^5 &= (x^3+y^3)(x^2+y^2)-x^2y^2(x+y)
\end{aligned}
$$