複素数

http://new_math.zacky.ninja-x.jp
printed : 2014.02.27/15:15

虚数単位 i

$x^2=a\ (a\geqq 0)$ を満たす値 x を、a の**“平方根”**という。

これに対し、$x^2=a\ (a<0)$ を満たす x はこれまで**存在しない**としてきた。

そこで、新たに**“虚数単位 i ”**という値を導入する。

虚数単位 i とは、

$$i^2=-1\quad (\text{すなわち、}i=\sqrt{-1})$$

を満たす値のことである

i は、imaginary number(想像上の数)の頭文字である。

これにより、

$$x^2=-a\ (a>0)\quad\Longrightarrow\quad x=\pm\sqrt{a}\,i$$

として表すこととする。

複素数

複素数 $\underbrace{a}_{\text{実部}} + \underbrace{b}_{\text{虚部}} i$

複素数 Complex number

実数と虚数の和(線形結合)で表される数 $a+bi$

実部 Real part

複素数の実数部分。

$a+bi$ の a

虚部 Imaginary part

複素数における虚数単位 i の係数。

$a+bi$ の b

純虚数

実部 $=0$ である複素数のこと。

共役複素数

虚部の符号が異なる2つの複素数の関係のこと。

$\alpha=a+bi$ の共役複素数を、$\overline{\alpha}=a-bi$ と表す。

複素数の相等

$$a+bi=c+di \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \text{実部} & a=c \\ \text{虚部} & b=d \end{cases}$$

特に、

$$a+bi=0 \quad \Longrightarrow \quad a=b=0$$

等しい複素数は考えるが、複素数の**大小関係**は考えないものとする。

備考 複素数の大小関係は無い

$i^2=-1$ とは、**面積が-1となる正方形の1辺の長さは** i という意味であるが、現実的に面積が負となる正方形は存在しない。
存在しない正方形の面積・辺の長さを比較することはできないので、虚数の大小も比較することはできない。

複素数の演算

虚数単位 i は、通常の文字と同様に計算してよい。

ただし、i の累乗は整理する必要がある。

$$\underbrace{1 \xrightarrow{\times i} i \xrightarrow{\times i} -1 \xrightarrow{\times i} -i}_{\text{ここが繰り返す}} \xrightarrow{\times i} 1 \xrightarrow{\times i} \cdots$$

和・差

$$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

積

$$\begin{aligned}(a+bi) \times (c+di) &= ac + (ad+bc)i + bdi^2 \\ &= (ac-bd) + (ad+bc)i\end{aligned}$$

商

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di} \\ &= \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2-d^2i^2} \\ &= \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}\end{aligned}$$

備考 和と差の積

和と差の積

実数	複素数
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$\begin{aligned}(a+bi)(a-bi) &= a^2 - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$

従来は**平方差(2乗差)**しか因数分解できなかったが、複素数により**平方和(2乗和)**も考えられるようになった。

※これも展開・因数分解の公式として覚えてしまってもいいかもしれません。

解の公式・判別式

Ⅰ A Ⅱ B Ⅲ C 補

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= 0\\
a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right) &= -c\\
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2-c\\
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a}-c\\
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a}\\
\therefore\ \sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}\\
\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right) &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$

判別式 $D=b^2-4ac$	**解の範囲**	
	実数範囲	**複素数範囲**
$D>0$	異なる2つの実数解	異なる2つの実数解
$D=0$	重解 (見かけ上、1つの実数解をもつ)	重解 (見かけ上、1つの実数解をもつ)
$D<0$	実数解なし	異なる(共役な)2つの複素数解

たった1つの方程式から解が2つも出るのは、複号"$\pm$"があるため。
すなわち、その後ろにある根号 $\sqrt{\ }$ の中身が大切なので、**"判別式"** $D=b^2-4ac$ と名前をつけた。

補足　解の第２公式

2次方程式$ax^2+2b'x+c=0$

において、解と判別式 D は、

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac$$

補足　２次方程式の解の個数

根号の中が負であっても、$\sqrt{-1}=i$ として扱えるようになったので、2次方程式において解なしとなる問題は無くなった。解の重複(重解)も含めて考えれば、**2次方程式は常に2つの解をもつ**といえる。

共役複素数解

判別式が $D<0$ となるとき、**"異なる2つの虚数解をもつ"**が、この**異なる2つの解**は**共役複素数**の関係になっている。
実数係数多項式 $P(x)$ において、方程式 $P(x)=0$ が複素数解 $x=\alpha$ をもつとき、その共役複素数 $\overline{\alpha}$ も解である。

$$P(\alpha)=0 \iff P(\overline{\alpha})=0$$

参考: ジャン・ル・ロン・ダランベール

累乗根の導出

方程式の例 … 累乗根の導出

値	平方根(2乗根)	立方根(3乗根)
1	$\begin{aligned} x^2 &= 1 \\ x^2-1 &= 0 \\ (x+1)(x-1) &= 0 \\ \therefore\ x &= \pm 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x^3 &= 1 \\ x^3-1 &= 0 \\ (x-1)(x^2+x+1) &= 0 \\ \therefore\ x &= 1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$
-1	$\begin{aligned} x^2 &= -1 \\ \therefore\ x &= \pm i \end{aligned}$	$\begin{aligned} x^3 &= -1 \\ x^3+1 &= 0 \\ (x+1)(x^2-x+1) &= 0 \\ \therefore\ x &= -1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$

値	平方根(2乗根)	立方根(3乗根)
1	± 1	$1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
-1	$\pm i$	$-1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

解と係数の関係

Ⅰ A Ⅱ B Ⅲ C 補

2次方程式の解と係数の関係

$$\text{2次方程式}\quad ax^2+bx+c=0 \quad \cdots ①$$

この解が、$x=\alpha,\beta$ のとき、

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0 \iff ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta=0 \quad \cdots ②$$

①、②が恒等式となるので、

$$\begin{cases} b &= -a(\alpha+\beta) \\ c &= a\alpha\beta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{a} &= \alpha+\beta \\ \dfrac{c}{a} &= \alpha\beta \end{cases}$$

3次方程式の解と係数の関係

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=ax^3+bx^2+cx+d=0$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma &= -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha &= \dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma &= -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

[発展] n 次方程式の解と係数の関係

$$\begin{array}{lll} \text{切片形} & a\prod_{i=0}^{n}(x-\alpha_i) & =0 \\ \text{一般形} & \sum_{i=0}^{n} a_i x^i & =0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{切片(因数分解)形} & a(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_i)\cdots(x-\alpha_n) & =0 \\ \text{一般形} & a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_{n-i}x^{n-i}+\cdots+a_0 & =0 \end{array}$$

この係数 a_{n-i} は、“n 個のカッコの内、x を選んだ i 個以外のカッコ＝すなわち $(n-i)$ 個のカッコから選ばれた解 α_i の積”であることがわかります。なので、

$$\begin{aligned} &\text{一般形における}x^{n-i}\text{の係数}a_{n-i}=a\times(-1)^i\times\text{解}\alpha\text{の}i\text{個ずつの積和} \\ \Longrightarrow\ &\text{解}\alpha\text{の}i\text{個ずつの積和}=(-1)^i\times\frac{\text{一般形における}x^i\text{の係数}a_i}{a} \end{aligned}$$

ということがわかります。

参考:「対称式」

複素数平面

複素数平面

ある複素数の実部を x 座標、虚部を y 座標とする直交座標平面のこと。

横軸を“**実軸**”といい、Re と表す。

縦軸を“**虚軸**”といい、Im と表す。

ド・モアブルの定理

$$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Longrightarrow \alpha^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

補足 他の表示による公式

$$\begin{aligned} &\text{オイラー表示} \quad \left(re^{i\theta}\right)^n &&= r^n e^{in\theta} \\ &\text{フェーザ表示} \quad (r\angle\theta)^n &&= r^n \angle n\theta \end{aligned}$$

オイラーの公式

テイラー展開

$$f(a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{d^n}{dx^n}f(a)}{n!}(x-a)^n$$

マクローリン展開

$a=0$ とする原点周りのテイラー展開。

$$f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{d^n}{dx^n}f(0)}{n!}x^n$$

オイラーの公式の導出

$e^x, \cos x, \sin x$ のマクローリン展開より

$$\begin{cases}\cos x &= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{d^n}{dx^n}\cos x\Big|_{x=0}}{n!}x^n\\ \sin x &= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{d^n}{dx^n}\sin x\Big|_{x=0}}{n!}x^n\\ e^x &= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^0}{n!}x^n\end{cases}$$

であるから、

$$\begin{cases}\cos x &= \frac{\cos 0}{0!}x^0 & {\color{red}+\frac{-\sin 0}{1!}x^1} & +\frac{-\cos 0}{2!}x^2 & {\color{red}+\frac{\sin 0}{3!}x^3} & +\cdots\\ \sin x &= {\color{red}\frac{\sin 0}{0!}x^0} & +\frac{\cos 0}{1!}x^1 & {\color{red}+\frac{-\sin 0}{2!}x^2} & +\frac{-\cos 0}{3!}x^3 & +\cdots\\ e^x &= \frac{1}{0!}x^0 & +\frac{1}{1!}x^1 & +\frac{1}{2!}x^2 & +\frac{1}{3!}x^3 & +\cdots\end{cases}$$ （赤字：$\sin 0=0$）

ここで、第1式に $x=i\theta$ ，第2･3式に $x=\theta$ を代入すると、

$$\begin{cases}\cos\theta &= \frac{1}{0!} & & -\frac{1}{2!}\theta^2 & & +\cdots\\ \sin\theta &= & +\frac{1}{1!}\theta & & -\frac{1}{3!}\theta^3 & +\cdots\\ e^{i\theta} &= \frac{1}{0!} & +\frac{1}{1!}i\theta & -\frac{1}{2!}\theta^2 & -\frac{1}{3!}i\theta^3 & +\cdots\end{cases}$$

以上から、$\sin\theta$ と i の積をとることで、

$$\begin{array}{rrlllll} & \cos\theta & =\frac{1}{0!} & & -\frac{1}{2!}\theta^2 & & +\cdots\\ +) & i\sin\theta & = & +\frac{1}{1!}i\theta & & -\frac{1}{3!}i\theta^3 & +\cdots\\ \hline & e^{i\theta} & =\frac{1}{0!} & +\frac{1}{1!}i\theta & -\frac{1}{2!}\theta^2 & -\frac{1}{3!}i\theta^3 & +\cdots\end{array}$$

よって、次の等式が得られる。

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

参考: 小説・映画「博士の愛した数式」

複素数の表現

I A II B III C 補

直交形式 $a+bi$

実数と虚数の和(線形結合)の形で表す複素数の基本的な表現。

複素数平面上における直交座標が、実部・虚部として現れる。

極表示 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$

複素数平面において極座標形式で表現したときの値。

$\sin,\cos$ の後に i を書くと、三角比との積なのか、角度との積なのかが判別できないため、虚数単位 i を前に書く。

オイラー表示 $re^{i\theta}$

極表示からマクローリン展開を用いて導くため、虚数単位 i を前に書く。

フェーザ表示 $r\angle\theta$

オイラー表示を簡略化した方法。

直交座標・極座標の変換

直交形式→極表示	極表示→直交形式
$\begin{cases} r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{b}{a} \end{cases}$	$\begin{cases} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{cases}$

$$\text{直交形式} \xrightarrow{\text{座標変換}} \text{極表示} \xrightarrow{\text{マクローリン展開}} \text{オイラー表示} \xrightarrow{\text{簡略化}} \text{フェーザ表示}$$

補足 電気電子工学分野の虚数単位 j

電気電子工学分野では、i は電流(交流電流の瞬時値)なので、混同を避けるために虚数単位には j を用いる。