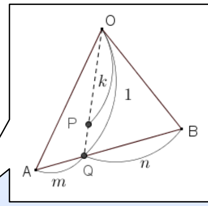
ベクトル演算の図形的性質

～公式を図形的に理解しよう～



直線を表す方程式

比例	$y = ax$
1点と傾き	$y = m(x-p)+q$
2点	$y = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$

交点の導出
ベクトル方程式を連立
⇒ 1次独立なベクトルの係数比較

ただ1通りの係数により表される

基底ベクトルの数 ⇒ n次元空間

1次独立の考え方

3点 A，B，C が同一直線上にある
$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$
1次元

ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行である
$\vec{a}//\vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}$

$\vec{a}$ だけ移動

3点 A，B，C が同一直線上にない
すなわち、
3点 A，B，C が同一平面上にある
$s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow s = t = 0$

☆

4点 A，B，C，P が同一平面上にある
$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$
2次元

ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$が同一平面上にある
$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$

$\vec{a}$ だけ移動

4点 A，B，C，D が同一平面上にない
すなわち、
4点 A，B，C，D が同一空間内にある
$s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} + u\overrightarrow{AD} = \vec{0}$
$\Rightarrow s = t = u = 0$

☆

5点 A，B，C，D，P が同一空間内にある
$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} + u\overrightarrow{AD}$
3次元

☆

一次独立なn個のベクトルの係数和が一定となる1次結合

分点に関する公式

分点公式の2段階利用

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{k} \quad (m+n \neq k)$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OP} = \frac{m+n}{k} \cdot \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$$

中点

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

重心

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$$

内分・外分

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\mp n\overrightarrow{OA} \pm m\overrightarrow{OB}}{\pm m \mp n} \quad \text{（複合同順）}$$

始点を含む分点公式
$\mathrm{AB:AC} = 1:k \iff \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

ベクトル方程式

1次元の図形

直線

$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{d}$

$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad (s+t=1)$
$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$

円（球）

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ or $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$

$|\overrightarrow{AP}| = r$ or $|\vec{p} - \vec{a}| = r$

2次元の図形

平面

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OP} = l\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC}$
$(l+m+n=1)$

$(n-1)$次元の空間の図形

内積

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

法線ベクトル

垂直なベクトルの内積
$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

直径の円周角

$\cos 0 = 1$

平行なベクトルの内積
$\vec{a}//\vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$

特に、
$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

半径 r

三平方の定理

ベクトルの大きさ（ノルム）

$$|\vec{a}| = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} & \left(\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{のとき}\right) \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \left(\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{のとき}\right) \end{cases}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$

三角形の面積

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

三角形の面積

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}|a_1 b_2 - a_2 b_1|$$