三角関数の公式の導出

二重枠（要暗記）からの流れを身に付けよう！

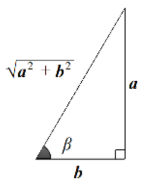
度数法と弧度法

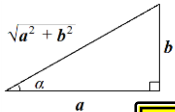
$360\,[°] \Leftrightarrow 2\pi\,[\mathrm{rad}]$ ，　$1\,[\mathrm{rad}] \Leftrightarrow 57.3\,[°]$

三角関数の合成（加法定理の逆）

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\beta)$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \cos\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$





余弦での合成は、$\alpha+\beta=90°$より余角でも導出可

三角比の定義

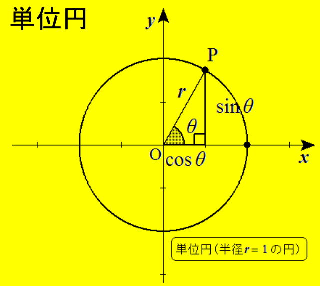
正弦　$\sin\theta = \dfrac{縦}{斜辺}$

余弦　$\cos\theta = \dfrac{横}{斜辺}$

正接　$\tan\theta = \dfrac{縦}{横}$

斜辺 → 1

単位円



定義より

三平方の定理

有理関数置換

$t=\tan x$ とおくと

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$$

$\theta \to x$

$t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

置換 $2\theta \to x$　$\left(\theta \to \dfrac{x}{2}\right)$

三角比の基本公式

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

下式 $\times \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ & 上式

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\theta} - 1$$

倍角公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

凡　例

必　須
独力導出
微積必須

加法定理

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

（複号同順）

$\begin{cases}\alpha=\theta\\ \beta=\theta\end{cases}$

$\begin{cases}\alpha=\theta\\ \beta=2\theta\end{cases}$

3倍角の公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$について整理する

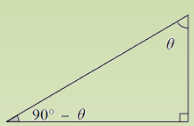
還元公式（抜粋）

余角

$$\sin(90°-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90°-\theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90°-\theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$

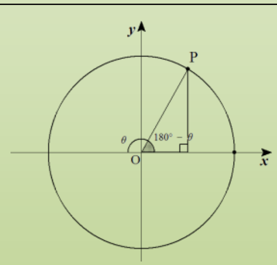


補角

$$\sin(180°-\theta) = \sin\theta$$

$$\cos(180°-\theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(180°-\theta) = -\tan\theta$$



※$\theta+90°$，$\theta+180°$ ，$-\theta$ なども同様に導出できる

※筆算でかくとよい

$\sin(\alpha+\beta)\pm\sin(\alpha-\beta)$

$\cos(\alpha+\beta)\pm\cos(\alpha-\beta)$

積和公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

$A=\alpha+\beta$，$B=\alpha-\beta$ とおく

$\Rightarrow\ \alpha = \frac{A+B}{2}$，$\beta = \frac{A-B}{2}$

和積公式

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

（加法定理・）半角公式は $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$より導出

半角公式

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

置換 $2\theta \to \theta$　$\left(\theta \to \dfrac{\theta}{2}\right)$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

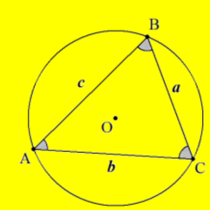
数学ⅠⅡでは、θの形にまとめたい

数学Ⅲの積分では、次数を下げたい

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

（Rは外接円の半径）



余弦定理

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2+a^2-2ca\cos B$$

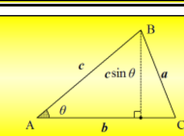
$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$$

※以下の形も使えるように！

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

三角形の面積　（$S=\frac{1}{2}\times$底辺$\times$高さ）

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$



式ではなく、位置関係＝図で覚える（2辺と間の角）

三角関数の公式の導出

二重枠(要暗記)からの流れを身に付けよう！

度数法と弧度法

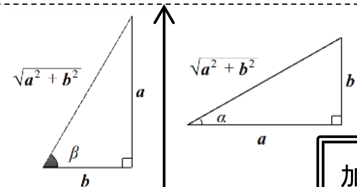
360 [°] ⇔ [rad] ， 1 [rad] ⇔ 57.3 [°]

三角関数の合成(加法定理の逆)

$a\sin\theta + b\cos\theta =$

$=$

$\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\theta\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$



余弦での合成は、
$\alpha+\beta=90°$より
余角でも導出可

三角比の定義

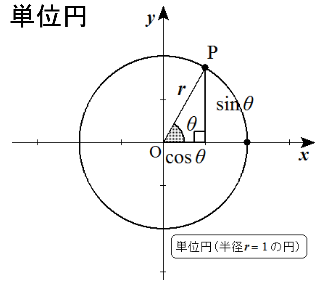
正弦 $\sin\theta = \frac{縦}{斜辺}$

余弦 $\cos\theta = \frac{横}{斜辺}$

正接 $\tan\theta = \frac{縦}{横}$

斜辺 → 1

単位円



定義より

三平方の定理

有理関数置換

$t=\tan x$ とおくと

$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$

$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$

$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$

$\sin^2 x = 1-\cos^2 x$

$\theta \to x$

$t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

置換 $2\theta \to x$ $\left(\theta \to \frac{x}{2}\right)$

三角比の基本公式

$\tan\theta =$

$=1$

下式 $\times\frac{1}{\cos^2\theta}$ ＆ 上式

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$=\frac{2}{1+\tan^2\theta}-1$

$\cos^2\theta =$

$\sin^2\theta =$

加法定理

$\sin(\alpha\pm\beta) =$

$\cos(\alpha\pm\beta) =$

$\tan(\alpha\pm\beta) =$

(複号同順)

$\begin{cases}\alpha=\theta\\ \beta=\theta\end{cases}$

倍角公式

$\sin 2\theta =$

$\cos 2\theta =$

$\tan 2\theta =$

$\cos 2\theta =$

$=$

$\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$について整理する

3倍角の公式

$\sin 3\theta =$

$\cos 3\theta =$

$\begin{cases}\alpha=\theta\\ \beta=2\theta\end{cases}$

(加法定理・)半角公式は
$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$より導出

半角公式

$\sin^2\frac{\theta}{2} =$

$\cos^2\frac{\theta}{2} =$

$\tan^2\frac{\theta}{2} =$

置換 $2\theta \to \theta$ $\left(\theta \to \frac{\theta}{2}\right)$

$\sin^2\theta =$

$\cos^2\theta =$

$\tan^2\theta =$

数学ⅠⅡでは、
θの形にまとめたい

数学Ⅲの積分では、
次数を下げたい

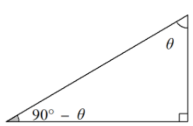
還元公式(抜粋)

余角

$\sin(90°-\theta) =$

$\cos(90°-\theta) =$

$\tan(90°-\theta) =$

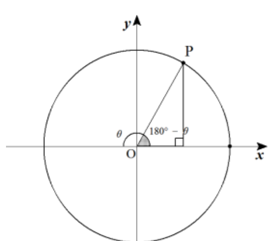


補角

$\sin(180°-\theta) =$

$\cos(180°-\theta) =$

$\tan(180°-\theta) =$



※$\theta+90°$，$\theta+180°$ ，$-\theta$
なども同様に導出できる

※筆算でかくとよい

$\sin(\alpha+\beta)\pm\sin(\alpha-\beta)$

$\cos(\alpha+\beta)\pm\cos(\alpha-\beta)$

積和公式

$\sin\alpha\cos\beta =$

$\cos\alpha\sin\beta =$

$\cos\alpha\cos\beta =$

$\sin\alpha\sin\beta =$

$A=\alpha+\beta$，$B=\alpha-\beta$ とおく

$\Rightarrow\ \alpha=\frac{A+B}{2}$，$\beta=\frac{A-B}{2}$

和積公式

$\sin A + \sin B =$

$\sin A - \sin B =$

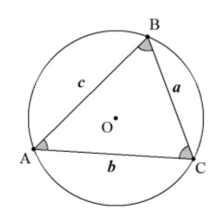
$\cos A + \cos B =$

$\cos A - \cos B =$

正弦定理

$=2R$

(Rは外接円の半径)



余弦定理

$a^2 =$

$b^2 =$

$c^2 =$

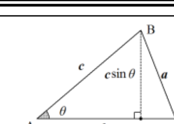
※以下の形も使えるように！

$\cos A =$

三角形の面積

$\left(S=\frac{1}{2}\times 底辺\times 高さ\right)$

$S=$ $=$ $=$



式ではなく、位置関係=図で
覚える(2辺と間の角)