

数列公式集 ～基本編～
～種々の数列のパターンに慣れよう～

複雑そうな
数列

小分けにして、既知の数列にする

$$\sum_{k=l}^m (ca_k \pm b_k) = c \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$$

基本的な数列の一般項・漸化式

数列の種類	一般項	漸化式の基本形
定数列	$a_n = c$	$a_{n+1} = a_n$
等差数列	$a_n = a_1 + (n-1)d$ $= a_0 + nd$ ※幻の第0項と見なす	$a_{n+1} = a_n + d$
等比数列	$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_{n+1} = r a_n$
階差数列	$a_n = \begin{cases} a_1 & (n=1) \\ a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k & (n \geq 2) \end{cases}$	$a_{n+1} = a_n + (n \text{ の式 })$
べき数列	$a_n = (\text{等差数列}) \times (\text{等比数列})$	

基本的な数列の和

数列・一般項	和の公式
定数列	$\sum_{k=1}^n c = cn$
等差数列	$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2} n(a_1 + a_n)$
1次式	$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$
2次式	$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$
3次式	$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$
等比数列	$\sum_{k=1}^n r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{r^n-1}{r-1}$

等比数列の和の公式は導出が
べき数列の解法になるので、
公式暗記だけではダメ！

$l < m < n$ とする

$$\overbrace{a_l + a_{l+1} + \dots + a_m} + \overbrace{a_{m+1} + \dots + a_n}$$

特に、 $l=1, m=n-1$ のとき、

$$\overbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}^{S_{n-1}} + a_n$$

結合公式

$$\sum_{k=l}^n a_k = \sum_{k=l}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k$$

$$S_n = \begin{cases} S_{n-1} + a_n & (n \geq 2) \\ a_1 & (n = 1) \end{cases}$$

分解公式

$$\sum_{k=l}^m a_k = \sum_{k=l}^n a_k - \sum_{k=m+1}^n a_k$$

$$a_n = \begin{cases} S_n + S_{n-1} & (n \geq 2) \\ S_1 & (n = 1) \end{cases}$$

根号を含む分数の分解

$$\frac{1}{\sqrt{n+d} + \sqrt{n}} = \frac{1}{d} (\sqrt{n+d} - \sqrt{n})$$

部分分数分解

$$\frac{1}{n(n+d)} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+d} \right)$$

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

一般項が差の形と
なる数列の和は
大部分が消去される

$$\begin{array}{r} \frac{1}{1} \\ + \frac{1}{2} \\ + \frac{1}{3} \\ + \frac{1}{4} \\ \vdots \\ + \frac{1}{n} \\ +) \quad \frac{-1}{n+1} \\ \hline S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} \\ -) \quad r S_n & = & + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \\ \hline (1-r) S_n & = & a_1 - a_1 r^n \\ \therefore S_n & = & \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \end{array}$$

等差中項

等差数列 a, b, c において、 $b = \frac{a+c}{2}$

等比中項

等比数列 a, b', c において、 $b' = \sqrt{ac}$

相加・相乗平均の関係より
 $\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac}$

(例) $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

数列公式集 ～応用編～
～特別な数列のパターンに慣れよう～

べき数列

$$a_n = (\text{等差数列}) \times (\text{等比数列})$$

Step1 求める数列の和を S_n とおく

Step2 一般項の等比数列部分において、公比となる値を掛ける $\rightarrow rS_n$

Step3 Step1・2 の差を求める

Step4 Step3 における中間項（赤枠内）が等比数列となるので、和を求める

※等比数列の公式導出と同じ手順である。

$$\begin{array}{rcll} S_n & = & a_1 & + (a_1 + d)r + (a_1 + 2d)r^2 + \cdots + a_n r^{n-1} \\ -) \quad rS_n & = & & + a_1 r + (a_1 + d)r^2 + \cdots + a_{n-1} r^{n-1} + a_n r^n \\ \hline (1-r)S_n & = & a_1 & + dr + dr^2 + \cdots + dr^{n-1} - a_n r^n \\ & & & + \sum_{k=1}^{n-1} dr^k \\ (1-r)S_n & = & a_1 & + \frac{d(1-r^{n-1})}{1-r} - a_n r^n \\ (1-r)S_n & = & a_1 & + \frac{d(1-r^{n-1})}{1-r} - a_n r^n \end{array}$$

群数列

並べられた項を区切ることで、まとまり（群）がつけられた数列のこと。

(i) 必然的に群をつくるタイプ ・ (ii) 作為的に群がつけられたタイプ を区別すること。

群の規則性は
群内末項に表れる

群内末項以外は、
(前群末項番号) + (群内項番号)
として表す

適切な値の
対応関係を
見抜けるように！

直接求められる値と
求められない値を
区別すること！

(i) 群で区切ることに意味がある数列

(例) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

項の値

通し項番号

群番号・
群内項番号

(ii) 群で区切ることに意味のない数列

(例) $1, 2 \mid 3, 4, 5, 6 \mid 7, 8, \dots$

項の値

項番号の変換は
常に行えるように
すること！

通し項番号

群番号・
群内項番号

通常
の
数列
的な
数え方

通し項番号 N

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k + 1$$

$$N = \sum_{k=1}^{n-1} b_k + m$$

$$\sum_{k=1}^n b_k$$

$$\sum_{k=1}^n b_k + 1$$

項の値 $\{a_N\}$

...

...

a_N

...

...

群内
の数え方

群番号 n

第 $(n-1)$ 群

第 n 群

第 $(n+1)$ 群

群内項番号 m

群内末項
 b_{n-1}

群内初項
1

$$m = N - \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

群内末項
 b_n

群内初項
1

群内項数 $\{b_n\}$

b_{n-1}

b_n

b_{n+1}

区切り方
の規則性

累計群内項数 $\sum_{k=1}^n b_k$
群内末項の通し項番号

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$\sum_{k=1}^n b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} b_k$$

値の意味

群数列の値の整理