漸化式のパターン別解法

～暗記ではなく、理解して慣れよう～

漸化式の基本解法

①自明　②理論的立式　③漸化式を落とす
④特性方程式　⑤数学的帰納法

隣接2項間漸化式　$a_{n+1}=pa_n+q$　のパターン別解法

係数	定数　$q=0$	定数　q	変数　$q(n)$
定数 $p=0$	①　$a_{n+1}=0$ 定数列　$a_n=0$	②　$a_{n+1}=q$ 定数列　$a_n=q$	③　$a_{n+1}=q(n)$ 一般項　$a_n=q(n)$
定数 $p=1$	④　$a_{n+1}=a_n$ 定数列　$a_n=a_1$	⑤　$a_{n+1}=a_n+q$ 等差数列 Ⓑ公差　$a_{n+1}-a_n=q$	⑥　$a_{n+1}=a_n+q(n)$ 階差数列 Ⓑ 階差　$a_{n+1}-a_n=q(n)$
定数 p	⑦　$a_{n+1}=pa_n$ 等比数列 公比　$\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$	⑧　$a_{n+1}=pa_n+q$ 特性方程式の利用 Ⓐ $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ s.t. 特性方程式　$\alpha=p\alpha+q$	⑨　$a_{n+1}=pa_n+q(n)$ 指数型 $q(n)=r^n$　指数型置換 - - - - - 整式型 $q(n)=n^{\circ}$　漸化式比較・階差型
変数 $p(n)$	⑩　$a_{n+1}=p(n)a_n$ 階比数列 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{p(n+1)}{p(n)}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{p(n+1)}=\frac{a_n}{p(n)}$	⑪　$a_{n+1}=p(n)a_n+q$ 階比数列型置換	⑫　$a_{n+1}=p(n)a_n+q(n)$ 適宜置換 or 数学的帰納法

隣接3項間漸化式

	⑬　$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$	⑭　$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n+r$
目指す形	$\begin{cases}a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)\\a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)\end{cases}$	$\begin{cases}a_{n+2}-\alpha a_{n+1}-\gamma_1=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n-\gamma_1)\\a_{n+2}-\beta a_{n+1}+\gamma_2=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n-\gamma_2)\end{cases}$
特性方程式 と 特性解	$x^2=a_{n+2}$, $x=a_{n+1}$, $a_n=1$ として、 $x^2-px-q=0$ $\therefore x=\alpha,\beta$	$x^2=a_{n+2}$, $x=a_{n+1}$, $a_n=1$, $r=0$ として、 $x^2-px-q=0$ $\therefore x=\alpha,\beta$　,　$\gamma_1=\frac{\beta-1}{r}$, $\gamma_2=\frac{\alpha-1}{r}$

隣接項の積型

$a_{n+1}a_n+pa_{n+1}+qa_n=0$

両辺 $\times\frac{1}{a_{n+1}a_n}$ より

$$1+\frac{p}{a_{n+1}}+\frac{q}{a_n}=0$$

Ⓓ $b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと、

$1+pb_{n+1}+qb_n=0$　→⑨

頻出置換パターン

Ⓐ スライド型

$$b_n=a_n-\alpha$$

Ⓑ 階差数列型

$$b_n=a_{n+1}-a_n$$

Ⓒ 階差数列もどき型

$$b_n=a_{n+1}-\alpha a_n$$

Ⓓ 調和数列型

$$b_n=\frac{1}{a_n}$$

Ⓔ 指数型

$$b_n=\frac{a_n}{r^n}$$

Ⓕ 階比数列型

$$b_n=\frac{a_n}{n}\quad\text{または}\quad b_n=\frac{a_n}{p(n)}$$

最終手段

これ以上複雑なものは、
数学的帰納法で解く